14 février 2020

Algèbre linéaire et calcul matriciel Pr.Youssef BENTALEB
Cycle préparatoire, Semestre 2 **Année Universitaire : 2019-2020**

Université Ibn Tofail
Ecole Nationale des Sciences Appliquées- Kenitra

Sommaire

1 Calcul matriciel et Déterminant

Chapitre 1 : CALCUL MATRICIEL

Dans ce chapitre K désignera R, ou C.

Définitions et propriétés

Un tableau rectangulaire, de nombres ($\in \mathbb{K}$), de la forme

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & . & . & . & a_{2n} \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & . & . & . & a_{mn} \end{pmatrix}$$

est appelé matrice. Les nombres a_{ij} sont appelés coefficients de la matrice. On note aussi la matrice A par : $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq m; 1 \leq j \leq n}$.

— Les lignes horizontales sont appelées lignes ou vecteurs lignes de la matrice.

— Les lignes verticales sont appelées colonnes ou vecteurs colonnes de la matrice.

— Une matrice à m lignes et n colonnes est appelée matrice de type (m, n).

— $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ désigne l'ensemble des matrices de type (m, n).

Exemples :

— $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 4 & 7 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$

— $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & -3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$

— $C = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$

— $D = \begin{pmatrix} 7 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{1,1}(\mathbb{R})$

— $E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & 4 \\ 5 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,3}(\mathbb{R})$

Matrices particulières

1. **Matrice ligne** C'est toute matrice A de type (1, n), $(A \in \mathcal{M}_{1,n})$.
2. **Matrice colonne** C'est toute matrice A de type (m, 1), $(A \in \mathcal{M}_{m,1})$.
3. **Matrice nulle** C'est la matrice de $\mathcal{M}_{(m,n)}$ dont tous les coefficients a_{ij} sont nuls. On note $O_{m,n}$.
4. **Matrice unité ou identité** C'est la matrice de $\mathcal{M}_{(n,n)}$ dont les coefficients a_{ij} vérifient $a_{ii} = 1$ et $a_{ij} = 0$ pour $i \neq j$. One note I_n.
5. **Matrice transposée** La matrice transposée d'une matrice A de $\mathcal{M}_{(m,n)}$ c'est la matrice B de $\mathcal{M}_{(n,m)}$ dont les lignes sont les colonnes de la matrice A et les colonnes sont les lignes de la matrice A.

Matrices carrées

— On appelle matrice carrée d'ordre n toute matrice de type (n, n).

— On note $\mathcal{M}_{(n)}$ l'ensemble des matrices de type (n, n).

Soit A une matrice carrée d'ordre n : $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$. Les coefficients $(a_{ii})_{1 \leq i \leq n}$ sont dits éléments ou coefficients diagonaux de la matrice A et constitue la diagonale principale de la matrice A. **Exemple :** Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ Les éléments diagonaux de la matrice A sont $a_{11} = 1$ et $a_{22} = 5$.

Matrice diagonale

Soit A une matrice carrée d'ordre n : $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$. On dit que la matrice A est une matrice diagonale si tous les éléments non diagonaux de la matrice sont nuls : ($a_{ij} = 0$ si $i \neq j$). **Exemples :**

1. $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$
2. Matrice scalaire : $A = \begin{pmatrix} c & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$, $c \in \mathbb{K}$.
3. Matrice unité ou matrice identité : $I_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Matrice triangulaire

Soit A une matrice carrée d'ordre n : $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$. On dit que A est une matrice triangulaire inférieure si tous ses éléments au dessus de la diagonale principale sont nuls ($a_{ij} = 0$ si $i < j$) :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & . & . & . & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & & & . \\ . & . & . & . & & . \\ . & & . & . & . & . \\ . & & & . & . & 0 \\ a_{n1} & . & . & . & a_{n(n-1)} & a_{nn} \end{pmatrix},$$

$((a_{ij})_{1 \leq j \leq i \leq n} \in \mathbb{K})$. Soit A une matrice carrée d'ordre n : $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$. On dit que A est une matrice triangulaire supérieure si tous ses éléments au dessous de la diagonale principale sont nuls ($a_{ij} = 0$ si $i > j$) :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & . & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & . & & & . \\ . & 0 & . & . & & . \\ . & & . & . & . & . \\ . & & & . & . & a_{(n-1)n} \\ 0 & . & . & . & 0 & a_{nn} \end{pmatrix},$$

$((a_{ij})_{1 \leq i \leq j \leq n} \in \mathbb{K})$. **Exemples :**

1. $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ sont des matrices triangulaires inférieures.
2. $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ sont des matrices triangulaires supérieures.

Si une matrice A est triangulaire supérieure alors sa matrice transposée ${}^tA$ est triangulaire inférieure et inversement.

Matrice symétrique

Soit A une matrice carrée d'ordre n : $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$. On dit que la matrice A est une matrice symétrique si elle est égale à sa matrice transposée : $A =^t A$ i.e. ($a_{ij} = a_{ji}$ $\forall 1 \leq i, j \leq n$). **Exemples :** $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 3 \\ 4 & 2 & 7 \\ 3 & 7 & 5 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 4 & 2 & 9 \\ 7 & 2 & 1 & 1 \\ 8 & 9 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Matrice antisymétrique

Soit A une matrice carrée d'ordre n : $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$. On dit que la matrice A est une matrice antisymétrique si sa matrice transposée est égale à sa matrice opposée : ${}^tA = -A$ i.e. ($a_{ij} = -a_{ji}$ $\forall 1 \leq i, j \leq n$). **Exemples :** $A = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & -4 & -3 \\ 4 & 0 & 7 \\ 3 & -7 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 & 6 & -7 & -8 \\ -6 & 0 & 2 & -9 \\ 7 & -2 & 0 & -1 \\ 8 & 9 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Les éléments diagonaux d'une matrice antisymétrique sont nuls.

Opérations sur les matrices

Deux matrices A et B de $\mathcal{M}_{(m,n)}$ sont égales si elles ont les mêmes coefficients : $A \equiv B \Leftrightarrow a_{ij} = b_{ij}$ $\forall 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$ avec $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$. Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_{(m,n)}$. La matrice C de $\mathcal{M}_{(m,n)}$ définie par : $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ $\forall 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$, s'appelle la matrice somme des matrices A et B. On note C=A+B.

1. $\forall A, B, C \in \mathcal{M}_{(m,n)} : \quad A + (B + C) = (A + B) + C$.
2. $\forall A, B \in \mathcal{M}_{(m,n)} : \quad A + B = B + A$.
3. $\forall A, B \in \mathcal{M}_{(m,n)} : \quad {}^t(A + B) =^t A +^t B$.

Exemple : $A = \begin{pmatrix} 0 & -4 & -3 \\ 4 & 0 & 7 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$

$$A + B = \begin{pmatrix} 0+1 & -4+3 & -3+2 \\ 4+(-1) & 0+5 & 7+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 3 & 5 & 11 \end{pmatrix}.$$

Soient A une matrice de $\mathcal{M}_{(m,n)}$ et α un scalaire ($\alpha \in \mathbb{K}$). La matrice C de $\mathcal{M}_{(m,n)}$ définie par $c_{ij} = \alpha a_{ij}$ $\forall 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$, s'appelle la matrice produit externe de la matrice A par le scalaire α. On note $C = \alpha.A$.

1. $\forall A \in \mathcal{M}_{(m,n)}$ $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K} : (\alpha + \beta).A = \alpha.A + \beta.A$.
2. $\forall A, B \in \mathcal{M}_{(m,n)}$ $\forall \alpha \in \mathbb{K} : \alpha.(A + B) = \alpha.A + \alpha.B$.

Exemples :

1. $\forall A \in \mathcal{M}_{(m,n)}$ $1.A = A$ et $0.A = O_{m,n}$.
2. $A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & -3 \\ 4 & 0 & 7 \end{pmatrix} : 3.A = 3.\begin{pmatrix} 2 & -4 & -3 \\ 4 & 0 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -12 & -9 \\ 12 & 0 & 21 \end{pmatrix}$.

Produit de deux matrices

— Soient A une matrice de $\mathcal{M}_{(m,n)}$ et B une matrice de $\mathcal{M}_{(n,p)}$. La matrice C de $\mathcal{M}_{(m,p)}$ définie par :

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} \quad \forall 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq p$$

s'appelle la matrice produit de la matrice A par la matrice B.

— On note $C = A \times B$.

— On ne peut effectuer la multiplication de deux matrices A et B que si le nombre des colonnes de la matrice A est égal au nombre de lignes de la matrice B (ici n).

1. $\forall A \in \mathcal{M}_{(m,n)}, B \in \mathcal{M}_{(n,p)}, C \in \mathcal{M}_{(p,q)}$:
$$(A \times B) \times C = A \times (B \times C) \in \mathcal{M}_{(m,q)}.$$
2. $\forall A \in \mathcal{M}_{(m,n)}, B, C \in \mathcal{M}_{(n,p)}$:
$$A \times (B + C) = A \times B + A \times C \in \mathcal{M}_{(m,p)}.$$
3. $\forall\ A \in \mathcal{M}_{(m,n)}, B \in \mathcal{M}_{(n,p)}$:
$$^t(A \times B) = ^t B \times ^t A \in \mathcal{M}_{(p,m)}.$$

Produit d'une matrice ligne par une matrice colonne

Soient $A = (a_{i1}, ..., a_{ik}, ..., a_{im})$ une matrice ligne $(A \in \mathcal{M}(1, m))$ et $B = \begin{pmatrix} b_{1j} \\ \vdots \\ b_{kj} \\ \vdots \\ b_{mj} \end{pmatrix}$ une matrice colonne $(B \in \mathcal{M}(m, 1))$. La matrice $C = A \times B$ est alors égale au scalaire défini par :

$$C = a_{i1} b_{1j} + ... + a_{ik} b_{kj} + ... + a_{im} b_{mj}, \quad (C \in \mathcal{M}(1, 1)).$$

Exemple : $A = (1, 2, -1, 0)$ et $B = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$A \times B = 1 \times (-2) + 2 \times 0 + (-1) \times 2 + 0 \times 1 = -4$$

Calcul pratique du produit matriciel

Soient deux matrices $A \in \mathcal{M}(m,n))$ et $B \in \mathcal{M}(n,p))$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{ik} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mk} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow \ \textit{ligne } L_i \\ \\ \\ \end{array}$$

$$B = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1j} & \dots & b_{1p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{k1} & \dots & b_{kj} & \dots & b_{kn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{nj} & \dots & b_{np} \end{pmatrix} \\ \qquad\qquad \nwarrow \textit{colonne } C_j \end{array}$$

Pour obtenir le coefficient P_{ij} de la matrice produit $P = A \times B$, on fait le produit de la ligne L_i de la matrice A (L_i : matrice ligne) par la colonne C_j de la matrice B (C_j : matrice colonne) :

$$P = \begin{pmatrix} L_1C_1 & \dots & L_1C_j & \dots & L_1C_p \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ L_iC_1 & \dots & L_iC_j & \dots & L_iC_p \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ L_mC_1 & \dots & L_mC_j & \dots & L_mC_p \end{pmatrix}, \quad P \in \mathcal{M}(m,p).$$

— $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

— $A \in \mathcal{M}(2,3)$ et $B \in \mathcal{M}(3,2) \Rightarrow A \times B \in \mathcal{M}(2,2)$ et $B \times A \in \mathcal{M}(3,3)$.

—
$$A \times B = \begin{pmatrix} L_1 \times C_1 & L_1 \times C_2 \\ L_2 \times C_1 & L_2 \times C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

—
$$B \times A = \begin{pmatrix} L_1 \times C_1 & L_1 \times C_2 & L_1 \times C_3 \\ L_2 \times C_1 & L_2 \times C_2 & L_2 \times C_3 \\ L_3 \times C_1 & L_3 \times C_2 & L_3 \times C_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

— $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

— $A \in \mathcal{M}(2,3)$ et $B \in \mathcal{M}(3,4) \Rightarrow A \times B \in \mathcal{M}(2,4)$.

— $A \times B =$

$$\begin{pmatrix} L_1 \times C_1 & L_1 \times C_2 & L_1 \times C_3 & L_1 \times C_4 \\ L_2 \times C_1 & L_2 \times C_2 & L_2 \times C_3 & L_2 \times C_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

— On ne peut pas effectuer la multiplication $B \times A$.

— En général $A \times B \neq B \times A$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

— En général $A \times B = O_n \not\Rightarrow A = O_n$ ou $B = O_n$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Matrice inversible

— Une matrice carrée A d'ordre n $(A \in \mathcal{M}(n))$ est dite inversible s'il existe une matrice carrée B d'ordre n $(B \in \mathcal{M}(n))$ telle que : $A \times B = B \times A = I_n$.

— On note $B = A^{-1}$.

— La matrice $B = A^{-1}$ s'appelle la matrice inverse de la matrice A .

Si deux matrices A et B de $\mathcal{M}(n)$ sont inversibles alors la matrice $A \times B$ est inversible et $(A \times B)^{-1} = B^{-1} \times A^{-1}$. **Exemples :**

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$

$$A \times B = B \times A = I_2.$$

   La matrice A est alors inversible et $A^{-1} = B$.

2. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \forall\, B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \ A \times B = \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq I_2$ et $B \times A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & c \end{pmatrix} \neq I_2$. La matrice A est alors non inversible.